Espaces Vectoriels Normés & Topologie (introduction)

On note $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$, E un $\mathbb{K}$-espace vectoriel

E peut être muni d'un produit scalaire si $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ (espace préhilbertien) et d'une norme $\|\cdot\|$ avec la définition suivante :

déf. Une fonction $\|\cdot\| : E \longrightarrow \mathbb{R}_+$ est une norme si on a

i) L'inégalité triangulaire : $\forall x, y \in E$, $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$
ii) La séparation : $\forall x \in E$, $(\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0)$
iii) La positive-homogénéité : $\forall x \in E$ $\forall \lambda \in \mathbb{K}$, $\|\lambda x\| = |\lambda| \, \|x\|$

exemple. Dans $\mathbb{R}^n$, on peut poser : (pour $X = (x_1, \dots, x_k)$)

$\|\cdot\|_2 : X \mapsto \sqrt{\sum_{k=1}^{n} x_k^2}$ $\qquad$ $\|\cdot\|_\infty : X \mapsto \max \{|x_k|\}_{k \in [\![1,n]\!]}$

$\|\cdot\|_1 : X \mapsto \sum_{k=1}^{n} |x_k|$

Ces trois applications sont des normes sur $\mathbb{R}^n$

Dans un $\mathbb{K}$-ev E de dimension finie $n \geq 1$. On fixe une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_n)$ de E. Pour tout $x \in E$, il existe un unique $(x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{K}^n$ tel que : $x = \sum_{k=1}^{n} x_k e_k$.

déf. On appelle $(e_1^*, \dots, e_n^*)$ la base duale avec $e_i^* : \begin{array}{l} E \longrightarrow \mathbb{K} \\ x \mapsto x_i \end{array}$ qui est une forme linéaire non nulle. C'est une base de l'espace des formes linéaires non nulles $E^* = \mathcal{L}(E, \mathbb{K})$ de dimension finie.

déf. On définit alors trois normes usuelles :

$$\|x\|_2 = \sqrt{\sum_{k=1}^{n} |x_k|^2}, \quad \|x\|_\infty = \max \{|x_k|\}_{k \in [\![1,n]\!]}, \quad \|x\|_1 = \sum_{k=1}^{n} |x_k|$$

rem. On peut définir des normes sur des $\mathbb{K}$-ev/sev de dimension infinie.

On considère un $\mathbb{K}$-ev normé $(E, \|\cdot\|)$

déf. On appelle « boule de centre a et de rayon $R > 0$ » et on note

$\mathcal{B}_f(a, R) = \{x \in E : \|x - a\| \leq R\}$ si elle est « fermée »

$\mathcal{B}_o(a, R) = \{x \in E : \|x - a\| < R\}$ si elle est « ouverte »

déf. Une partie $A \subseteq E$ est convexe si pour tous $x, y \in A$ pour tout $\lambda \in [0,1]$,

$$(1-\lambda)x + \lambda y \in A.$$

déf. Une partie $A \subseteq E$ est bornée si il existe $M > 0$ tel que $A \subseteq \mathcal{B}_f(0, M)$ i.e. $\forall x \in A$, $\|x\| \leq M$.

déf. Une partie $A \subseteq E$ est ouverte si pour tout $a \in A$, il existe $R > 0$ tel que $\mathcal{B}_f(a, R) \subset A$

déf. Une partie $A \subseteq E$ est fermée si $E \setminus A$ est ouverte.

prop. On peut montrer la caractérisation séquentielle suivante :

$A \subseteq E$ est fermée si, et seulement si, pour toute suite convergente à valeurs dans A, sa limite reste dans A.

déf. Une partie compacte est une partie fermée et bornée.

déf. L'intérieur d'une partie $A \subseteq E$ noté $\mathring{A}$ est le plus grand ouvert contenu dans A, i.e. $\bigcup B$ où B est un ouvert de A.

déf. L'adhérence d'une partie $A \subseteq E$ notée $\bar{A}$ est le plus petit fermé qui contient A, i.e. $\bigcap B$ où B est un ouvert qui contient A

prop. $\mathring{\overbrace{E \setminus A}} = E \setminus \bar{A}$ et $\overline{E \setminus A} = E \setminus \mathring{A}$

déf. Soit $(u_n) \in E^{\mathbb{N}}$. On dit que l est une valeur d'adhérence si il existe une suite extraite de (u_n) notée $(u_{\varphi(n)})$ convergente vers l. On note $\mathrm{Adh}(u_n)$ l'ensemble des valeurs d'adhérence de (u_n)

prop. On peut caractériser : $l \in \mathrm{Adh}(u_n)$ par :

i) $\forall \varepsilon > 0$, $\forall p \in \mathbb{N}$, $\exists n \geq p$, $\|u_n - l\| \leq \varepsilon$
ii) Pour tout $\varepsilon > 0$, il existe une infinité d'indices $n \in \mathbb{N}$ tels que $\|u_n - l\| \leq \varepsilon$.

prop. Ouvert de $\mathbb{R}$ = Réunion finie ou dénombrable d'intervalles ouverts.

thm (De Bolzano-Weierstrass dans $\mathbb{R}$) $[T_1]$

Toute suite réelle bornée admet une valeur d'adhérence, si bien que si $(u_n) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est bornée, $\mathrm{Adh}(u_n)$ est non vide, borné et fermé. Dans ce cas, $\mathrm{Adh}(u_n)$ est un compact non vide de $\mathbb{R}$, donc contenu dans un segment $[a,b]$ avec $a, b \in \mathbb{R}$ $(a \leq b)$

Donc $a = \inf [a,b]$ est atteint et c'est la plus petite des valeurs d'adhérence, notée $\liminf (u_n)$. De même $b = \limsup (u_n)$

rem. On peut étendre $\mathrm{Adh}(u_n)$ à $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$: $\mathrm{Adh}_\infty(u_n)$

$+\infty \in \mathrm{Adh}_\infty(u_n) \Leftrightarrow$ il existe $(u_{\varphi(n)})$ qui tend vers $+\infty$
$\Leftrightarrow (u_n)$ n'est pas majorée.

(idem en $-\infty$)

exemple $\mathrm{Adh}\left((-1)^n n\right) = \emptyset$ et $\mathrm{Adh}_\infty\left((-1)^n n\right) = \{-\infty, +\infty\}$

rem. Le thm de B.W. est encore vrai dans $\mathbb{C}$.

prop. Une suite (u_n) bornée converge si, et seulement si, $\liminf u_n$ et $\limsup u_n$ coincident.

On revient au cas : $(E, \|\cdot\|_\infty)$ un $\mathbb{K}$-ev de dimension finie $p \geq 1$. On fixe une base $\mathcal{B} = (e_1, \dots, e_p)$ et on pose $\|\cdot\|_\infty(x) = \max \{e_i^*(x), i \in [\![1, p]\!]\}$

thm (de Bolzano-Weierstrass, version provisoire) $[T']$

Toute suite bornée d'éléments de E admet une valeur d'adhérence.

déf. Soient N, N' deux normes sur E. On dit que N est « plus fine » de N' si il existe $K > 0$ tel que $\forall x \in E$, $N'(x) \leq K N(x)$

déf. Soient N, N' deux normes sur E. On dit que N et N' sont équivalentes si N est plus fine que N' et que N' est plus fine que N i.e. il existe $K_1, K_2 > 0$ telles que $\forall x \in E$, $K_1 N(x) \leq N'(x) \leq K_2 N(x)$

thm $[T_2]$

Toutes les normes de E sont équivalentes.

thm (de Bolzano-Weierstrass, version générale) $[T_3]$

Toute suite bornée d'éléments de E admet une valeur d'adhérence, indépendamment de la norme considérée.

preuve $[T']$ On suppose que (u_n) est bornée pour $\|\cdot\|_\infty$. Soit $i \in [\![1, d]\!]$, $e_i^*(u_n)$ est la i-ème coordonnée de (u_n) dans la base $\mathcal{B}$. Alors $(e_i^*(u_n))_{n \in \mathbb{N}}$ est une suite d'éléments de $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

$\|u_n\|_\infty = \max |e_i^*(u_n)|$ et $\exists M \in \mathbb{R}_+^*$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|u_n\|_\infty \leq M$.

d'où $\forall i \in [\![1, d]\!]$, $\forall n \in \mathbb{N}$, $|e_i^*(u_n)| \leq \|u_n\|_\infty \leq M$.

donc $(e_i^*(u_n))$ est une suite bornée ; par Bolzano-Weierstrass dans $\mathbb{K}$, on a une extractrice φ_1 telle que $e_1^*(u_{\varphi(n)}) \longrightarrow l_1 \in \mathbb{K}$

$(e_2^*(u_{\varphi(n)}))$ est une suite extraite d'une suite bornée, elle est donc également bornée. Par Bolzano-Weierstrass dans $\mathbb{K}$, il existe une extractrice φ_2 telle que $e_2^*(u_{\varphi_1 \circ \varphi_2(n)}) \longrightarrow l_2 \in \mathbb{K}$

Par récurrence sur $i \in [\![1, p]\!]$, il existe une extractrice φ_i telle que $e_i^*(u_{\varphi_1 \circ \dots \circ \varphi_i(n)}) \longrightarrow l_i \in \mathbb{K}$.

Posons $\Phi = \varphi_1 \circ \dots \circ \varphi_p$. Alors $(e_i^*(u_{\Phi(n)}))$ est une suite extraite de $(e_i^*(u_{\varphi_1 \circ \dots \circ \varphi_i(n)}))$, d'où $e_i^*(u_{\Phi(n)}) \longrightarrow l_i \in \mathbb{K}$

$$\|u_{\Phi(n)} - l\|_\infty = \max_{i \in [\![1, d]\!]} |e_i^*(u_{\Phi(n)}) - e_i^*(l)| \text{ où } l = \sum_{i=1}^{p} l_i e_i$$

d'où $\|u_{\Phi(n)} - l\|_\infty \longrightarrow 0$. $\square$

preuve $[T_2]$ Soit $\|\cdot\|$ une norme quelconque sur E.

i) $\|\cdot\|_\infty$ plus fine que $\|\cdot\|$.

Soit $x = \sum_{i=1}^{p} x_i e_i \in E$. Alors $\|x\| \leq \sum_{i=1}^{p} |x_i| \, \|e_i\|$

donc $\|x\| \leq \sum_{i=1}^{p} \max\{|x_i|\} \, \|e_i\| \leq \sum_{i=1}^{p} \|x\|_\infty \|e_i\| = \|x\|_\infty \sum_{i=1}^{p} \|e_i\|$

Il existe $K \in \mathbb{R}_+$ tel que : $\forall x \in E$, $\|x\| \leq K \|x\|_\infty$

ii) $\|\cdot\|$ plus fine que $\|\cdot\|_\infty$

Supposons par l'absurde que : $\forall K' \in \mathbb{R}_+$, $\exists x \in E$, $\|x\|_\infty > K' \|x\|$.

Soit $n \in \mathbb{N}$. On dispose de $x_n \in E$ tel que $\|x_n\|_\infty > n \|x_n\|$.

On a $(x_n) \in E^{\mathbb{N}}$ telle que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|x_n\|_\infty > n \|x_n\|$

On fixe $n \in \mathbb{N}$. Si $x_n = 0$, on a $0 > 0$: absurde. On a alors $x_n \neq 0$ et on pose $u_n = \frac{x_n}{\|x_n\|_\infty}$. On a $\|u_n\|_\infty = 1$.

D'où (u_n) bornée pour $\|\cdot\|_\infty$. Par $[T']$, il existe une extractrice φ telle que $u_{\varphi(n)} \longrightarrow l \in E$ pour $\|\cdot\|_\infty$.

On a : $\|u_n\| = \left\| \frac{x_n}{\|x_n\|_\infty} \right\| = \frac{\|x_n\|}{\|x_n\|_\infty} \leq \frac{1}{n}$

Par thm des Gendarmes, $u_n \longrightarrow 0$ pour $\|\cdot\|$.
Or $u_{\varphi(n)} \longrightarrow l$ pour $\|\cdot\|$. Par unicité, $l = 0$.

De plus $\|u_n\|_\infty = 1$ donc $\|u_n\|_\infty \longrightarrow \|l\|_\infty$ $\left(\big| \|v_n\| - \|w_n\| \big| \leq \|v_n - w_n\| \right)$
d'où par unicité, $\|u_n\|_\infty = 1 \neq \|l\|_\infty = 0$: absurde,

cc) Toutes les normes sont équivalentes. $\square$

preuve $[T_3]$ On suppose que (u_n) est une suite bornée pour $\|\cdot\|$.

Par $[T_2]$, il existe $K \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall x \in E$, $\|x\|_\infty \leq K \|\cdot\|$.

donc il existe $M \in \mathbb{R}_+$ tel que $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|u_n\| \leq M$ donc $\forall n \in \mathbb{N}$, $\|u_n\|_\infty \leq KM$

Par $[T']$, il existe une extractrice φ telle que $u_{\varphi(n)} \longrightarrow l$ pour $\|\cdot\|_\infty$. Donc il existe $K' \in \mathbb{R}_+$ tel que $\underbrace{\|u_{\varphi(n)} - l\| \leq K' \|u_{\varphi(n)} - l\|_\infty}_{\forall n \in \mathbb{N}}$

et donc $u_{\varphi(n)} \longrightarrow l$ pour $\|\cdot\|$. $\square$