

Stabilité de $\text{Rec}(\Sigma)$

Thm Si $L_1, L_2 \in \text{Rec}(\Sigma)$ Alors $L_1 | L_2 \in \text{Rec}(\Sigma)$

preuve Il existe $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ deux automates tels que $L_i = \mathcal{L}(\mathcal{A}_i)$

On note $\mathcal{A}_i := (Q_i, \Sigma, q_i, F_i, \delta_i)$ et on suppose (quitte à renommer) $Q_1 \cap Q_2 = \emptyset$. On pose alors $Q := Q_1 \cup Q_2 \cup \{q_0\}$

$F := F_1 \cup F_2$, et pour $q \in Q$, $c \in \Sigma$: $\delta(q_0, \varepsilon) \mapsto \{q_1, q_2\}$ et

$$\delta(q, c) \mapsto \begin{cases} \delta_1(q, c) & \text{si } q \in Q_1 \\ \delta_2(q, c) & \text{si } q \in Q_2 \end{cases}$$

On pose $\mathcal{A} = (Q, \Sigma, q_0, F, \delta)$ de sorte que $\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \mathcal{L}(\mathcal{A}_1) | \mathcal{L}(\mathcal{A}_2)$

Thm Si $L \in \text{Rec}(\Sigma)$ Alors $\bar{L} \in \text{Rec}(\Sigma)$

preuve Il existe un automate $\mathcal{A}$ tel que $L = \mathcal{L}(\mathcal{A})$

- i) Il faut déterminer $\mathcal{A}$
- ii) Il faut compléter $\mathcal{A}$
- iii) Les états acceptants deviennent non acceptants & vice versa

On note $\bar{\mathcal{A}}$ l'automate obtenu. On a alors $\mathcal{L}(\bar{\mathcal{A}}) = \bar{\mathcal{L}(\mathcal{A})}$. En effet $\mathcal{A}$ étant déterministe & complet, si un mot m est accepté par $\mathcal{A}$, c'est que $\delta^*(q_0, m) \in F$. Le même chemin dans $\bar{\mathcal{A}}$ et mène vers un état acceptant. De même si $m \in \Sigma^*$ n'est pas accepté par $\mathcal{A}$, c'est $\delta^*(q_0, m) \notin F$. Alors il existe un chemin vers un état acceptant, donc $m \in \mathcal{L}(\bar{\mathcal{A}})$

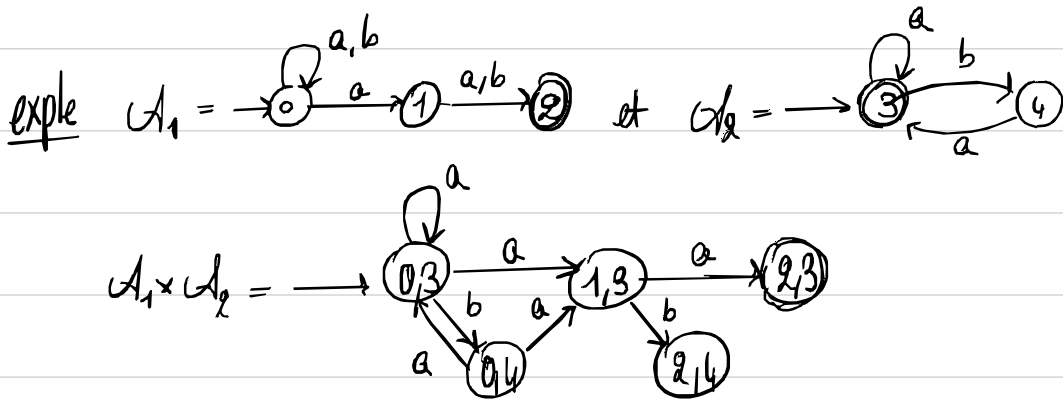
Thm Si $L_1, L_2 \in \text{Rec}(\Sigma)$ Alors $L_1 \cap L_2 \in \text{Rec}$

def. Soit $\mathcal{A}_1 := (Q_1, \Sigma, I_1, F_1, \delta_1)$ et soit $\mathcal{A}_2 := (Q_2, \Sigma, I_2, F_2, \delta_2)$ deux dfa

On définit l'automate produit de $\mathcal{A}_1$ et $\mathcal{A}_2$ noté $\mathcal{A}$ par $\mathcal{A} := (Q, \Sigma, I, F, \delta)$

où $Q := Q_1 \times Q_2$, $I := I_1 \times I_2$, $F := F_1 \times F_2$ et pour $(q_1, q_2) \in Q$, $c \in \Sigma$

$$\delta((q_1, q_2), c) \mapsto \delta_1(q_1, c) \times \delta_2(q_2, c)$$



$$\begin{aligned} \delta((0,3), a) &= \delta_1(0, a) \times \delta_2(3, a) \\ &= \{(0,3), (1,3)\} \end{aligned}$$

etc.

preuve du Thm Montrons que $\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \mathcal{L}(\mathcal{A}_1) \cap \mathcal{L}(\mathcal{A}_2)$. On a :

$$\begin{aligned} u \in \mathcal{L}(\mathcal{A}) &\Leftrightarrow \delta^*(I, u) \cap F \neq \emptyset \Leftrightarrow \delta^*(I_1 \times I_2, u) \cap (F_1 \times F_2) \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow (\delta_1^*(I_1, u) \times \delta_2^*(I_2, u)) \cap (F_1 \times F_2) \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow \delta_1^*(I_1, u) \neq \emptyset \text{ et } \delta_2^*(I_2, u) \neq \emptyset \\ &\Leftrightarrow u \in \mathcal{L}(\mathcal{A}_1) \text{ et } u \in \mathcal{L}(\mathcal{A}_2) \end{aligned}$$