Méthode des Perturbations (HP, peut tomber au concours)

1. Présentation

1.1. Cadre

Il s'agit d'une méthode de résolution approchée d'équations.
On a 4 types d'équations
a) Une seule équation à une inconnue
b) Système d'équations à plusieurs inconnues
c) Une équation différentielle [équa-diff]
d) Un système d'équa-diffs.

1.2. Notations

Pour a), l'inconnue est notée « x ». Dans le cas b), on se ramène à une seule inconnue vectorielle. De même pour c) et d)

rem Le cas le plus simple pour b) est : X vérifie une équation du type $F_0(X) + \varepsilon F_1(X) = 0$ où ε est un paramètre qui quantifie l'amplitude de la perturbation, si bien que $\varepsilon F_1(X)$ est la fameuse perturbation.

rem Dans le cas c), on a quelque chose de la forme $F_0(X, \frac{dX}{dt}) + \varepsilon F_1(X, \frac{dX}{dt}) = 0$.

1.3. Objectifs.

On veut trouver une solution approchée de (*) : $F_0(X) + \varepsilon F_1(X) = 0$
Les solutions exactes de (*) dépendent de ε, on s'en fixe une que l'on note X_{sol}.

2. Description de la Méthode

idée faire un développement en série entière de X_{sol} selon ε (on suppose le rayon de convergence non nul) :

$$X_{sol} = \sum_{n=0}^{\infty} X_n \varepsilon^n$$

2.1. À l'ordre 0

X_{sol} est solution de (*) si $\varepsilon = 0$ i.e. on doit résoudre $F_0(X_0) = 0$.

2.2. À l'ordre 1

rem On se limite très souvent à cet ordre.

On a $X_{sol} \simeq X_0 + X_1 \varepsilon$

Etape 1. Injecter dans (*) puis faire un développement limité [DL] à l'ordre 1 en X_0 :

$$F_0(X_0 + X_1\varepsilon) + \varepsilon F_1(X_0 + X_1 \varepsilon) = 0$$

$$\Rightarrow F_0(X_0) + X_1 \varepsilon F_0'(X_0) + \varepsilon\big(F_1(X_0) + \underbrace{X_1 \varepsilon F_1'(X_0 + X_1\varepsilon)}_{\varepsilon^2 = o(\varepsilon)}\big) = 0$$

$$\Rightarrow F_0(X_0) + \varepsilon\big(X_1 F_0'(X_0) + F_1(X_0)\big) = 0$$

Etape 2. Par unicité du DL : $X_1 F_0'(X) + F_1(X_0) = 0$
d'où $X_1 = -\frac{F_1(X_0)}{F_0'(X)}$ (équation en X_1 que l'on résout)

2.3. Dérivées d'ordres supérieures

On se fixe un ordre n : $X_{sol} = \sum_{k=0}^{n} X_k \varepsilon^k + o(\varepsilon^n)$

La méthode est la même sauf qu'on pousse le DL à l'ordre n.
L'annulation de l'ordre k permet d'obtenir une équation où $x_k = f(x_{k-1})$

2.4. Equation non linéaire selon ε

Si $X = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}$ est solution de $F(X, \varepsilon) = 0$, la méthode est la même mais $x_k = f(x_0, \dots, x_{k-1})$.

3. Validité de la méthode.

Il faut déterminer si l'élimination des ordres supérieurs est légitime ou pas : on fait au cas par cas.