

Rappels & Compléments : Applications Linéaires

Soit E un K -ev, $E_1, \dots, E_n$ des sev, F un K -ev

prop Supposons que $E = \bigoplus_{i=1}^n E_i$. Soit $u_i \in \mathcal{L}(E_i, F)$ pour $i \in \{1, \dots, n\}$,
il existe un unique $u \in \mathcal{L}(E, F)$ tel que $u|_{E_i} = u_i$

preuve Par analyse-synthèse

(a) Décomposons $x \in E$ dans $\bigoplus_{i=1}^n E_i$ puis remarquons que
 $u(x) = \sum_{i=1}^n u(x_i) = \sum_{i=1}^n u_i(x_i)$

(s) On pose $u: x \mapsto \sum_{i=1}^n u_i(x_i)$. On vérifie que $u \in \mathcal{L}(E, F)$
et que $u|_{E_i} = u_i$

thm (Lemme de Décomposition des Noyaux)

Soit $P \in K[X]$ tel que $P = \prod_{k=1}^n P_k$ où $\forall i, j: i \neq j \Rightarrow P_i \wedge P_j = 1$.

Soit $u \in \mathcal{L}(E)$. Alors:

$$\ker P(u) = \bigoplus_{k=1}^n \ker P_k(u)$$

preuve Par récurrence sur $n \geq 1$.

(i) évident pour $n=1$.

(h) Supposons que c'est vrai au rang $n-1$ pour $n \geq 2$.

$$P = \underbrace{\prod_{k=1}^{n-1} P_k}_Q \cdot \underbrace{P_n}_R$$

Soit $D \in K[X]$ tel que $D|Q$ et $D|R$. Alors $D|\prod_{k=1}^{n-1} P_k$ et $P_i \wedge P_j = 1$

Par Lemme de Gauss, il existe $i \in \{1, \dots, n-1\}$ tel que $D|P_i$.

donc $D|P_i$ et $D|P_n$. Or $P_i \wedge P_n = 1$ donc $D=1$ (On peut supposer D unitaire): $Q \wedge R = 1$.

Donc $U, V \in K[X]$ tels que $UQ + VR = 1 \in K[X]$

donc $U(u) \circ Q(u) + V(u) \circ R(u) = 1u^0 = \text{id}_E$

Or $\ker Q(u) = \bigoplus_{k=1}^{n-1} \ker P_k(u)$ par hypothèse.

Notons alors que: $(\ker Q(u)) \oplus (\ker R(u)) = \ker P(u)$

(a) On a $\text{id}_E = U(u) \circ Q(u) + V(u) \circ R(u)$

donc $x = U(u)[Q(u)(x)] + V(u)[R(u)(x)] = x_1 + x_2$

Or $Q(u)(x) = Q(u)(x_1 + x_2) = \underbrace{Q(u)(x_1)}_{=0} + Q(u)(x_2)$

$$UQ(u)(x) = UQ(u)(x_2) = (1 - VR)(u)(x_2) = \underbrace{(x_2 - V(u)[R(u)(x_2)])}_{=0}$$

Donc $x_2 = UQ(u)(x)$ et $x_1 = VR(u)(x)$

(s) On prend $x_1 + x_2 = VR(u)(x) + UQ(u)(x) = \underbrace{(UQ + VR)}_{1 \in K[X]}(u)(x) = x$

On vérifie que $Q(u)(x_1) = 0$ et $R(u)(x_2) = 0$

exemple ex 66 (feuille 3)